4.1. Prawdopodobieństwa neutralne względem ryzyka

Poddajmy bliższej analizie równanie macierzowo-wektorowe (por. [1, s. 45–46]):

$$A^T\psi = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = S,$$ które w postaci układu **n** równań z **m** niewiadomymi zapisujemy następująco:

$$\begin{aligned} \langle A_{\bullet 1}, \psi \rangle &= A_{11}\psi_1 + A_{21}\psi_2 + \ldots + A_{m1}\psi_m = s_1, \\ \langle A_{\bullet 2}, \psi \rangle &= A_{12}\psi_1 + A_{22}\psi_2 + \ldots + A_{m2}\psi_m = s_2, \\ &\vdots \\ \langle A_{\bullet n}, \psi \rangle &= A_{1n}\psi_1 + A_{2n}\psi_2 + \ldots + A_{mn}\psi_m = s_n. \end{aligned} \tag{29}$$

Definicja 21. Przez **pełną stopę zwrotu** z inwestycji o wartości końcowej W_k i wartości początkowej W_p (*holding period return*) rozumiemy liczbę $R = \frac{W_k}{W_p}$.

Łatwo pokazać, że $R = r + 1$, gdzie $r = \frac{W_k - W_p}{W_p}$ jest stopą zwrotu (*rate of return*).

W szczególności r_f będzie oznaczać **stopę zwrotu bez ryzyka** (*risk-free rate*), a R_f **pełną stopę zwrotu bez ryzyka**, w efekcie czego $R_f = r_f + 1$.

Powróćmy do układu równań (29) i zapytajmy, czym są współczynniki $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{m1}$, w wierszu 1? Zgodnie z przyjętymi wcześniej oznaczeniami są one wypłatami z 1. płynnego papieru wartościowego (kolumna 1) w 1., 2. itd. oraz ostatnim m-tym stanie rynku, którego cena wynosi s_1 zł. Czym są współczynniki $A_{12}, A_{22}, \ldots, A_{m2}$ w wierszu 2? Są one wypłatami z 2. płynnego papieru wartościowego w 1., 2. itd. oraz ostatnim m-ym stanie rynku, którego cena na tym rynku wynosi s_2 zł. Analogiczna uwaga dotyczy pozostałych **n-2** wierszy.

Zatem jeśli podzielimy wypłaty $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{m1}$ przez ceny odpowiadających im płynnych papierów wartościowych, to otrzymamy nowe współczynniki, które będą miały, zgodnie z definicją 21, interpretacje pełnych stóp zwrotu z 1. papieru wartościowego (równanie 1), z 2. papieru wartościowego (równanie 2) itd., co obrazuje następujący układ równań:

$$
\begin{aligned}
&\frac{A_{11}}{s_1}\psi_1 + \frac{A_{21}}{s_1}\psi_2 + \ldots + \frac{A_{m1}}{s_1}\psi_m = 1 \\
&\frac{A_{12}}{s_2}\psi_1 + \frac{A_{22}}{s_2}\psi_2 + \ldots + \frac{A_{m2}}{s_2}\psi_m = 1 \\
&\vdots \\
&\frac{A_{1n}}{s_n}\psi_1 + \frac{A_{2n}}{s_n}\psi_2 + \ldots + \frac{A_{mn}}{s_n}\psi_m = 1.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Zakładając, że 1. płynny papier wartościowy jest bonem, który zawsze (we wszystkich stanach rynku) wypłaca 1 zł, czyli $A_{11} = A_{21} = \ldots = A_{m1} = 1$ zł, możemy rozbić powyższy układ (30) na 2 części, mianowicie równanie 1 zapisać oddzielnie jako:

$$R_f\psi_1 + R_f\psi_2 + \ldots + R_f\psi_m = 1, \tag{30_1}$$

oraz pozostałe **n-1** równań pozostawiamy bez zmian:

$$
\begin{aligned}
&\frac{A_{12}}{s_2}\psi_1 + \frac{A_{22}}{s_2}\psi_2 + \ldots + \frac{A_{m2}}{s_2}\psi_m = 1 \\
&\vdots \\
&\frac{A_{1n}}{s_n}\psi_1 + \frac{A_{2n}}{s_n}\psi_2 + \ldots + \frac{A_{mn}}{s_n}\psi_m = 1.
\end{aligned}
\tag{30_2}
$$

Skrótowo układ równań (30_2) można zatem zapisać w postaci macierzowo-wektorowej jako $R\psi = 1 \in R^{n-1}$, gdzie:

$$
R = \begin{bmatrix}
\frac{A_{12}}{s_2} & \frac{A_{22}}{s_2} & \ldots & \frac{A_{m2}}{s_2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{A_{1n}}{s_n} & \frac{A_{2n}}{s_n} & \ldots & \frac{A_{mn}}{s_n}
\end{bmatrix}.
$$

W takiej sytuacji układ równań (30) można zapisać jako:

$$R_f(\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_m) = 1, \tag{31_1}$$

$$
R\psi = \mathbf{1} \in R^{n-1}, \quad \text{czyli} \quad
\begin{bmatrix}
\frac{A_{12}}{s_2} & \frac{A_{22}}{s_2} & \ldots & \frac{A_{m2}}{s_2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{A_{1n}}{s_n} & \frac{A_{2n}}{s_n} & \ldots & \frac{A_{mn}}{s_n}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.
\tag{31_2}
$$